

# Zur Gültigkeit des Schalenmodells als Näherung für einige leichte Kerne

Von ROLF HÜPER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. **12 a**, 295–310 [1957]; eingegangen am 28. Januar 1957)

Für die Kerne mit  $A=6, 7, 13$  und  $14$  wird gezeigt, in welcher Weise ihre Energieschemata von dem Ansatz für die Wechselwirkung der Nukleonen abhängen. Die Parameter hierfür werden im Einklang mit den bekannten Daten der Neutron-Proton-Streuung und des Deuterons sowie der Bindungsenergie der leichtesten Kerne variiert. Der Berechnung liegen nur Zustände der 2p-Schale zugrunde. Bei der Anpassung erhält man zum Teil recht befriedigende Ergebnisse für die Energieniveaus und die magnetischen Momente, vor allem dann, wenn man für die Spin-Bahn-Kopplung und die Tensorkraft eine wesentlich größere Reichweite wählt als für die Zentralkräfte. Dagegen ist das Schalenmodell für die Lösung folgender Fragen unzulänglich: 1. Übereinstimmung der theoretisch erhaltenen Niveaus von  $\text{Li}^6$  mit dem Experiment, 2. Parität gewisser niedrig angeregter Zustände, 3. Berechnung der Quadrupolmomente und 4. Erklärung für die große Lebensdauer von  $\text{C}^{14}$  gegenüber  $\beta$ -Zerfall.

## § 1. Problemstellung

In den letzten Jahren haben vor allem SCHULTEN<sup>1</sup>, INGLIS<sup>2</sup> und KURATH<sup>3</sup> untersucht, wie weit sich die Eigenschaften der Kerne mit  $5 \leq A \leq 16$  ( $A$  sei die Massenzahl) auf Grund des Schalenmodells von HAXEL, JENSEN und SUESS<sup>4</sup> sowie GOEPPERT-MAYER<sup>5</sup> erklären lassen. Es würde sich bei diesen Kernen zunächst um die Konfigurationen  $(1s)^4 (2p)^{A-4}$  handeln, während angenommen wird, daß Zustände höherer Schalen, insbesondere der 2s- und 3d-Schale, keinen wesentlichen Beitrag liefern.

Aus den Experimenten kennt man für viele Zustände die Anregungsenergie, den Spin, den Gesamtisotopenspin und die Parität<sup>6</sup> sowie in einigen Fällen das magnetische Dipol- und das elektrische Quadrupolmoment<sup>7</sup>.

Ferner haben sich INGLIS<sup>2</sup>, JANCOVICI und TALMI<sup>8</sup>, FERRELL und VISSCHER<sup>9</sup> und ELLIOTT<sup>10</sup> mit der Möglichkeit befaßt, die unerwartet große Lebensdauer von  $\text{C}^{14}$  gegenüber  $\beta$ -Zerfall in  $\text{N}^{14}$  mit Hilfe von Wellenfunktionen des Schalenmodells zu begründen.

Es soll hier nun versucht werden, einige von den Fragen zu klären, die in den genannten Arbeiten noch offen geblieben sind. Daher werden deren Methoden und Ergebnisse zunächst kurz diskutiert.

Die gesuchten Wellenfunktionen sind allgemein nach folgenden Gesichtspunkten aufgebaut. Sie lassen sich nach „Annäherungsfunktionen“ entwickeln, die bereits dem PAULI-Prinzip genügen und Eigenfunktionen zu der Parität  $P$ <sup>11</sup>, dem Gesamtdreh-

$$P = (-1)^{i=1} = (-1)^{A-4} = (-1)^A$$

( $i$  sei die Bahndrehimpulsquantenzahl im  $i$ -ten Einzelzustand).

impuls  $J$  und dessen  $z$ -Komponente  $J_z$ , dem Gesamtisotopenspin  $T$  und dessen  $z$ -Komponente  $T_z$  sind. ( $T$  ist als gute Quantenzahl zu betrachten, wenn man wie hier die Kernkräfte als ladungsunabhängig annimmt – abgesehen von der für die ganz leichten Kerne unbedeutenden COULOMB-Kraft.)

Für die Konstruktion dieser nullten Näherungen sind zwei verschiedene Wege benutzt worden. Die Funktionen wurden entweder nach ihren Werten von  $L$  und  $S$  (Gesamtbahndrehimpuls und -spin) klassifiziert oder nach der Zahl der Teilchen, bei denen jeweils Spin und Bahndrehimpuls, anschaulich gesprochen, parallel bzw. antiparallel sind. Im ersten Falle, der sogenannten  $LS$ -Darstellung, sind die Matrizen der Zentralkräfte diagonal, in der sogenannten  $jj$ -Darstellung dagegen die einer Ein-

<sup>1</sup> R. SCHULTEN, Z. Naturforsch. **8 a**, 759 [1953].

<sup>2</sup> D. R. INGLIS, Phys. Rev. **87**, 915 [1952]. — D. R. INGLIS, Rev. Mod. Phys. **25**, 390 [1953].

<sup>3</sup> D. KURATH, Phys. Rev. **101**, 216 [1956]. — Weitere Berechnungen für die Kerne der 2p-Schale siehe bei: B. H. FLOWERS u. A. R. EDMONDS, Proc. Roy. Soc., Lond. A **212**, 248 [1952]. — A. M. LANE, Proc. Phys. Soc., Lond. A **66**, 977 [1953]. — J. P. ELLIOTT, Proc. Roy. Soc., Lond. A **218**, 345 [1953].

<sup>4</sup> O. HAXEL, J. H. D. JENSEN u. M. G. SUESS, Z. Phys. **128**, 295 [1950].

<sup>5</sup> M. GOEPPERT-MAYER, Phys. Rev. **75**, 1969 [1949].

<sup>6</sup> F. AJZENBERG u. T. LAURITSEN, Rev. Mod. Phys. **27**, 77 [1955].

<sup>7</sup> J. E. MACK, Rev. Mod. Phys. **22**, 64 [1950]. — Siehe auch die Kartei „Nuclear Data“.

<sup>8</sup> B. JANCOVICI u. I. TALMI, Phys. Rev. **95**, 289 [1954].

<sup>9</sup> R. A. FERRELL u. W. M. VISSCHER, Bull. Amer. Phys. Soc. **30**, No. 3, RA-8 [1955].

<sup>10</sup> J. P. ELLIOTT, Phil. Mag. **1**, 503 [1956].

<sup>11</sup> Solange man sich auf die Konfiguration  $(1s)^4 (2p)^{A-4}$  beschränkt, hat man automatisch Eigenfunktionen der Parität



Teilchen – Spin-Bahn-Kopplung. Je nachdem wie stark diese ist, erweist sich entweder die eine oder die andere Darstellung als zweckmäßiger, ebenso wie in der Atomhülle.

SCHULTEN bestimmt die Entwicklungskoeffizienten durch Lösung von Säkularproblemen (Eigenwerte der Energiematrizen in der  $jj$ -Darstellung).

Hierbei geht er von dem Potentialansatz aus

$$\begin{aligned} V(1,2) = & (w + m P_{12} + b Q_{12} + h P_{12} Q_{12}) V_c J_c(r_{12}) \\ & - \frac{\alpha V_c}{2 \beta \hbar} \left\{ (\vec{\sigma}_1 [\text{grad}_1 J_c(r_{12}) \times \vec{p}_1]) \right. \\ & \left. + (\vec{\sigma}_2 [\text{grad}_2 J_c(r_{12}) \times \vec{p}_2]) \right\}. \end{aligned}$$

Der erste Teil des Ansatzes stellt die Zentralkräfte dar, wobei die Operatoren  $P_{12}$  Austausch der Ortskoordinaten  $r_1$  und  $r_2$ , und  $Q_{12}$  Austausch der Spinkoordinaten  $s_1$  und  $s_2$  bewirken.

Es ist

$$\begin{aligned} J_c(r_{12}) &= \exp(-\beta r_{12}^2), \quad r_{12} = |r_{12}| = |r_1 - r_2| \\ \beta^{-1/2} &= 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \text{ die Reichweite der Kraft,} \\ V_c &= -35 \text{ MeV deren Stärke,} \\ w=m &= 0,35, \\ b=h &= 0,15. \end{aligned}$$

Der zweite Teil ist als eine Zwei-Teilchen – Spin-Bahn-Kopplung anzusehen. Er ist jedoch nicht invariant gegenüber GALILEI-Transformationen. Ersetzt man ihn durch den Ansatz<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} W_{SB}(1,2) = & - \frac{\alpha V_c}{2 \hbar \beta} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \\ & \cdot \{ [\text{grad}_1 J_c(r_{12}) \times \vec{p}_1] + [\text{grad}_2 J_c(r_{12}) \times \vec{p}_2] \}, \end{aligned}$$

welcher die erforderlichen Invarianzeigenschaften hat und in dieser Arbeit verwendet worden ist, so zeigt ein Vergleich der Ergebnisse folgendes:

1. In bezug auf die Spin – Bahn-Wechselwirkung zwischen der 2p- und 1s-Schale stimmen die Matrixelemente bis auf einen einheitlichen Faktor 1,2 für beide Ansätze miteinander überein. Für Kerne am Anfang der 2p-Schale ist fast nur dieser Teil der Kopplung wesentlich. Für Lithium ist der von SCHULTEN benutzte Ansatz also eine brauchbare Näherung.

2. Die Spin – Bahn-Wechselwirkung zwischen Zuständen innerhalb der 2p-Schale ergibt mit den beiden Ansätzen jeweils sehr verschiedene Matrixelemente. Dies wirkt sich auf die Kerne am Ende der Schale sehr stark aus.

$\alpha = 0,04$  ist von SCHULTEN so bestimmt worden, daß sich die Doubletaufspaltung von  $\text{He}^5$  ungefähr richtig ergibt, sofern man die beiden Zustände als gebunden ansieht.

Beim Aufbau der Wellenfunktionen geht SCHULTEN von den Eigenfunktionen des isotropen harmonischen Oszillators mit der Frequenz  $\omega = \hbar \alpha / M_N$  aus. ( $M_N$  ist die Nukleonmasse,  $\alpha^{-1/2}$  ein Maß für die räumliche Ausdehnung der Wellenfunktionen.) Für alle behandelten Kerne wird einheitlich  $\alpha^{-1/2} = 1,73 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  angesetzt.

Die berechneten magnetischen Momente und zum Teil auch die Quadrupolmomente ergeben nach SCHULTEN verhältnismäßig gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die Spins und Isotopenspins der Grundzustände haben die richtigen Werte.

Die Energieschemata von  $\text{Li}^6$ ,  $\text{Li}^7$ ,  $\text{C}^{13}/\text{N}^{13}$  und  $\text{N}^{14}$  sind von ihm ebenfalls berechnet worden. Sie zeigen besonders bei  $\text{Li}^7$  eine sehr deutliche Diskrepanz im Vergleich zu den bisher aus den Versuchen bekannten Niveaus. Nach Meinung des Verfassers ist das zu einem wesentlichen Teil darauf zurückzuführen, daß die von SCHULTEN gewählte Stärke der Zentralkraft  $V_c = -35 \text{ MeV}$  zu klein ist. Nach numerischen Rechnungen von BETHE und BACHER<sup>13</sup> würde sich für  $V_c = -47 \text{ MeV}$  die Bindungsenergie des Deuterons richtig ergeben, sofern man wie SCHULTEN eine Gaußsche Ortsabhängigkeit mit  $\beta^{-1/2} = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  annimmt und die Tensorkraft nicht berücksichtigt.

INGLIS<sup>2</sup> gibt für die Kerne der 2p-Schale einen Überblick darüber, wie weit sich ihre Energieschemata durch die  $jj$ - oder die LS-Kopplung approximieren lassen. Für diese beiden Extremfälle hat er die Zustände berechnet und durch Störungsrechnungen die Richtung bestimmt, in der sich die Niveaus verschieben, wenn man in das Zwischengebiet der „intermediären Kopplung“ hineingeht. So erhält man ein qualitatives Bild von der Änderung der Termabstände in Abhängigkeit von der Stärke der SB-Kopplung.

Für den Potentialansatz werden Zentralkräfte mit annähernd ROSENFELD-Mischung genommen

$$(w = h = 0; m = 0,8; b = 0,2),$$

außerdem eine Ein-Teilchen – Spin-Bahn-Kopplung von der Form

$$W_{SB} = a \sum_{i=1}^A (\vec{l}_i, \vec{s}_i). \quad (2)$$

<sup>12</sup> Näheres hierzu siehe Gl. (11) ff.

<sup>13</sup> H. BETHE u. O. BACHER, Rev. Mod. Phys. **8**, 111 [1936].

Eine Zwei-Teilchen-SB-Kopplung und die Tensorkraft werden nicht berücksichtigt.

Außer  $w$ ,  $m$ ,  $b$  und  $h$  werden keine Parameter von vornherein festgelegt, auch die Ortsabhängigkeit der Wechselwirkung und der Wellenfunktionen nicht. Statt dessen werden sämtliche Matrixelemente der Zentralkräfte auf zwei Integrale  $K$  und  $L$  zurückgeführt. Die zugehörigen Koeffizienten sind nämlich von den noch nicht festgelegten Größen unabhängig. Es wird angenommen  $L = 6K$ , was in gewisser Näherung zu rechtfertigen ist<sup>14</sup>.

Durch  $K$  ist bei INGLIS und KURATH der gesamte „Maßstab“ für jeden Kern bestimmt. Sie tragen  $E/K$  ( $E$  = Energie) in Abhängigkeit von  $a/K$ , der relativen Stärke der SB-Kopplung, auf. Daraufhin werden  $K$  und  $a/K$  speziell für jeden einzelnen Kern erneut derart festgelegt, daß sich jeweils das Energieschema den experimentellen Daten möglichst gut anpaßt.

Die Ergebnisse von INGLIS sind von KURATH verfeinert worden durch Lösung von Säkulargleichungen in demjenigen Bereich von  $a/K$ , für den nach INGLIS die beste Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erwarten ist. Das Wechselwirkungspotential ist dabei unverändert übernommen worden. Angepaßt wurde außer  $K$  und  $a/K$  auch  $L/K$ . KURATH hat nicht nur die Energien in Abhängigkeit von diesen Größen dargestellt, sondern auch verschiedene der magnetischen Momente und Quadrupolmomente.

Durch die Anpassung läßt sich größtenteils eine qualitative Übereinstimmung mit dem Tatsachenmaterial erzielen, wobei für die einzelnen Kerne der Wert von  $K$  zwischen 0,9 und 1,2 und der von  $a/K$  zwischen 1 (Li) und 6 (N) variiert. Man hat es nach den Diagrammen von INGLIS bei den Kernen der 2p-Schale im allgemeinen mit intermediärer Kopplung zu tun, während sich viele Daten von schweren Kernen – soweit bekannt – durch reine  $jj$ -Kopplung erklären lassen.

Man könnte auf Grund der Arbeiten von INGLIS und KURATH erwarten, daß die meisten behandelten Kerne einschließlich vieler angeregter Zustände durch das Schalenmodell beschrieben werden können. Jedoch werden Diskrepanzen zwischen dieser Vorstellung und der Wirklichkeit nicht in allen Fällen zutage treten.  $a$  und  $K$  hängen nicht nur von den Eigenschaften der speziellen Wellenfunktion ab, sondern auch kritisch von den – konstanten – Para-

metern der Nukleonenwechselwirkung. Nun ist aber nicht zu übersehen, wie stark man auch diese Größen – gleichzeitig mit den Wellenfunktionen im Rahmen des Schalenmodells – bei der Anpassung für jeden einzelnen Wert von  $A$  ändern muß, um jeweils die geeigneten Werte von  $a$  und  $K$  zu erhalten.

Offen geblieben ist also u. a. die „Konsistenzfrage“. Da wir noch keine völlig brauchbare Mesonentheorie der Kernkräfte kennen, ist es von Interesse zu wissen, ob es überhaupt ein phänomenologisches Potential gibt, durch das sich die Wechselwirkung der Nukleonen beschreiben läßt. Man hätte zu fordern, daß sich einerseits mit einem solchen Ansatz die richtigen Werte für den Singulett- und Tripletzustand des Deuterons, die Neutron – Proton-Streuung und die Bindungsenergien von  $H^3$ ,  $He^3$  und  $He^4$  ergeben, und andererseits z. B. richtige Energieschemata und Momente der Kerne mit  $5 \leq A \leq 16$ . Hat man ein Potential gefunden, von dem man annehmen kann, daß es diese Bedingungen erfüllt, so läßt sich feststellen, welche dieser Kerne durch das Schalenmodell gut angenähert werden können.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb folgender Weg beschritten:

Die Wechselwirkung der Nukleonen wird als Summe von Zentralkräften, der Tensorkraft und einer Zwei-Teilchen – Spin-Bahn-Kopplung angesetzt. Hierdurch wird es möglich, die Termaufspaltungen explizit auf die Wechselwirkungen einzelner Nukleonenpaare zurückzuführen, statt sie nur pauschal zu berechnen wie im Falle einer Ein-Teilchen-Spin – Bahn-Kopplung. Zusätzlich wird die Wirkung eines abstoßenden zentralen Dreikörperpotentials kürzester Reichweite untersucht. In dieser Form sollen die Ursachen für die Kernabsättigung versuchsweise Berücksichtigung finden.

Die Parameter für die Zwei-Körper-Zentralkräfte und die Tensorkraft werden im wesentlichen festgelegt auf Grund der Zwei-Nukleonendaten und der Forderung, daß sich der Spin und der Isotopenspin der Grundzustände von  $Li^6$  und  $N^{14}$  richtig ergeben sollen. Die Spin – Bahn-Kopplung wird gewissen Termaufspaltungen von  $Li^6$ ,  $Li^7$  und  $N^{15}$  und die Dreikörperkraft der Bindungsenergie von  $He^4$  angepaßt.

Mit dem so erhaltenen Potential werden die Bindungsenergien von  $Li^6$ ,  $Li^7$  und  $O^{16}$  versuchsweise berechnet.

<sup>14</sup>  $L/K$  hängt von dem Verhältnis zwischen der Reichweite der Zentralkraft und der räumlichen Ausdehnung der

Wellenfunktion ab. Bei Annahme von Oszillatorenfunktionen und  $J_c(r_{12}) = \exp(-\beta r_{12}^2)$  ist  $L/K = 6$ , wenn  $\alpha/\beta = 1$ .

Als Ausgangspunkt zur Berechnung von Matrixelementen dienen die Annäherungsfunktionen von SCHULTEN<sup>15</sup>, abgesehen von dem Wert von  $\alpha$ . Dieser ist jeweils durch die COULOMBSche Energiedifferenz zwischen Zuständen, die zu demselben Ladungsmultiplett gehören, bestimmt worden.

Die Energieschemata und Momente von Li<sup>6</sup>, Li<sup>7</sup>/Be<sup>7</sup>, C<sup>13</sup>/N<sup>13</sup> und N<sup>14</sup> werden im einzelnen ausgerechnet. Außerdem ergibt sich durch eine Störungsrechnung eine Übersicht über die Abhängigkeit der Termabstände von bestimmten Parametern der Wechselwirkung. Dadurch wird es ermöglicht, die Niveaus mit größerer Sicherheit zu identifizieren und genauer zu sehen, wie weit das Schalenmodell baubar ist, als man es bisher hat können.

Den Schluß bildet eine Diskussion der Möglichkeiten, den  $\beta$ -Zerfall von C<sup>14</sup> zu erklären angesichts der übrigen Ergebnisse dieser Arbeit.

## § 2. Die Wechselwirkung der Nukleonen

Für die Wechselwirkung der Nukleonen wird – zusätzlich zum COULOMB-Potential – angesetzt

$$\begin{aligned} V(1,2) = & (w + m P_{12} + b Q_{12} + h P_{12} Q_{12}) V_c e^{-\beta r_{12}^2} \\ & + (w' + m' P_{12}) S_{12} V_c e^{-\beta' r_{12}^2} \quad (3) \\ & + (w'' + m'' P_{12}) O_{SB} \hbar^{-1} V_{SB} e^{-\beta'' r_{12}^2}. \end{aligned}$$

Hier bedeutet

$$S_{12} = \frac{3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^2} - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \text{ den Tensoroperator}$$

und  $O_{SB} = (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2, \vec{l}_{12})$  den Operator für eine Zwei-Teilchen-Spin-Bahn-Kopplung.

( $\vec{l}_{12}$  = „relativer Bahndrehimpuls“

$$= \frac{1}{2} [\vec{r}_{12} \times (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)] = -i \hbar [\vec{r}_{12} \times \nabla_{\vec{r}_{12}}].$$

Es sei

$$w + m + b + h = w' + m' = w'' + m'' = 1. \quad (4)$$

Für die Spin-Bahn-Kopplung und die Tensorkraft hat es keinen Sinn, zusätzlich BARTLETT- und HEISENBERG-Operatoren einzuführen, da  $S_{12}$  und  $O_{SB}$ , angewandt auf eine Singulett-Spinfunktion, Null ergeben. Der Triplettanteil der Spinfunktionen wird aber durch  $Q_{12}$  nicht verändert, weil er symmetrisch ist. Also wirkt hier  $Q$  wie der Einheitsoperator und damit  $PQ$  wie  $P$ .

$V_c$ ,  $V_{SB}$  und  $V_T$  sind Konstanten, durch die die Stärken der Potentialanteile bestimmt sind.

<sup>15</sup> Herr Dr. SCHULTEN hat sie mir aus unveröffentlichten Unterlagen seiner Arbeit freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

Die zu dem Ansatz noch hinzukommende Dreikörperkraft wird in § 2(c) besprochen.

Die COULOMB-Kraft wird nur bei der Berechnung der Bindungsenergie von He<sup>4</sup> berücksichtigt. Sie wirkt sich auf die Termabstände von Li und N bei Vernachlässigung höherer Konfigurationen gar nicht aus, da es sich um die zentrale und damit von  $j$  und  $j_z$  unabhängige Wechselwirkung eines einzelnen Protonenzustandes bzw. „-loches“ der 2p-Schale mit abgeschlossenen Schalen handelt. Auch auf die Energie-differenzen von Be und C hat die COULOMB-Kraft offenbar keinen großen Einfluß, wie ein Vergleich der experimentell bekannten Niveaus von Spiegelkernen zeigt.

### a) Bestimmung der Zentral- und Tensorkräfte

Zur Festlegung von  $w$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $V_c$ ,  $\beta$ ,  $V_T$  und  $\beta'$  stehen die folgenden empirischen Zwei-Nukleonendaten zur Verfügung<sup>16, 17</sup>:

$E_D = 2,225 \text{ MeV}$	Bindungsenergie des Deuterons (Triplettzustand),
$Q = 0,01469 R^2$	Quadrupolmoment des Deuterons,
$r_{\text{rot}} = 0,394 R$	Effektive Reichweite für Triplettstreuung,
$r_{\text{os}} = 0,58 R$	Effektive Reichweite für Singulettstreuung,
$a_t = 1,245 R$	Streulänge für Triplettstreuung,
$a_s = -5,487 R$	Streulänge für Singulettstreuung.

Hier bedeutet  $R = \hbar/(2 M E_D)^{1/2} = 4,317 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  den „Deuteronradius“, wobei  $M$  die reduzierte Masse des Neutron-Proton-Systems ist.

Ferner soll das Potential die im Schwerpunktsystem annähernd um 90° symmetrische Winkelverteilung der an Protonen gestreuten Neutronen (von 40 bzw. 90 MeV) möglichst gut wiedergeben.

$w'$ ,  $w''$ ,  $V_{SB}$  und  $\beta''$  können aus folgenden Gründen noch nicht mit Hilfe der Zwei-Nukleonendaten festgelegt werden:

1. Man darf annehmen, daß die SB-Kopplung keinen nennenswerten Beitrag zur Bindungsenergie des Deuterons liefert, da im Triplettfall die Beimischung von D-Zuständen sehr klein ist und in der Energiematrix des Deuterons Übergangselemente der SB-Kopplung zwischen Zuständen mit verschiedenen  $L$  verschwinden.

<sup>16</sup> M. H. KALOS et al., Nucl. Phys. **1**, 233 [1956].

<sup>17</sup> I. M. BLATT u. H. WEISSKOPF, Theor. Nuclear Phys. S. 85.

2. Die Tensorkraft geht in den Tripletztzzustand nur mit  $w' + m' = 1$  ein und in den Singulettzustand gar nicht.

Auf Grund numerischer Rechnungen haben KALOS et al.<sup>16</sup> Tabellen zusammengestellt, in denen die Werte von  $V_T$ ,  $Q$ ,  $r_{\text{ot}}$ ,  $a_t$ ,  $r_{\text{os}}$ ,  $a_s$  und  $p^D$  (der prozentualen Beimischung der D-Wellenfunktion im Grundzustand des Deuterons) in Abhängigkeit von  $V_c$ ,  $\beta$  und  $\beta'$  aufgeführt sind. Hierbei ist  $V_T$  jeweils so bestimmt worden, daß sich für das Deuteron die richtige Bindungsenergie ergibt.

Die Tabellen sind für verschiedene Ortsabhängigkeiten berechnet worden. Rechnungen, die Verfasser auf Grund der Tabellen mit dem YUKAWA-Potential durchgeführt hat, haben gezeigt, daß sich damit für die Kerne der 2p-Schale im wesentlichen die gleichen Schlußfolgerungen und Ergebnisse herausstellen, wie sie in dieser Arbeit mit der GAUSSschen Ortsabhängigkeit gefunden wurden.

Die Angaben in den Tabellen von KALOS haben zur Voraussetzung  $b + h = 0$ , d. h.

$$w + m + b + h = w + m - (b + h)$$

oder

Tripletztanteil der Zentralkräfte = Singulettanteil der Zentralkräfte.

Diese Annahme führt – praktisch unabhängig von den übrigen Parametern – zu einem falschen Grundzustand bei Li<sup>6</sup> und N<sup>14</sup>, sofern man nur wenigstens eine ganz grobe Geltung des Schalenmodells für diese Kerne voraussetzt. Abb. 3, Spalte 1, zeigt ein mit  $b + h = 0$  berechnetes Energieschema. Offensichtlich liegen die Zustände mit  $J = 0$ ,  $T = 1$  extrem niedrig. Das Ergebnis wird noch schlechter für  $b + h < 0$ , wie sich zeigen läßt.

Man wird also fordern müssen, daß  $b + h > 0$  sei. Es ist in den Rechnungen dieser Arbeit daraufhin  $b + h \approx 0,2$  angenommen worden. Dies ist der ungefähr höchste Wert, mit dem sich noch Übereinstimmung mit den Zwei-Nukleonendaten erzielen läßt. Wie die mit  $b + h = 0,19$  berechneten Energieschemata in Abb. 3, Spalten 4 bis 7, zeigen, liegen selbst mit diesem Wert die tiefsten Zustände mit  $T = 1$  bei Li<sup>6</sup> noch zu niedrig.

(MASSEY et al.<sup>18</sup> finden bei der Anpassung an experimentelle Ergebnisse der Nukleon- $\alpha$ -Streuung  $b + h = 0,2$ .)

Man kann sich leicht klarmachen, welchem Wert von  $s_c$  dies in Tab. III von KALOS entspricht. Nach

BLATT et al.<sup>19, 20</sup> ist für die GAUSSsche Ortsabhängigkeit

$$b_c = 1,4354 \beta^{-1/2}, \quad V_c = 229,208 \frac{s_{\text{ct}}}{b_c^2} \text{ MeV},$$

$$b_t = 1,4354 \beta'^{-1/2}, \quad V_T = 229,208 \frac{s_t}{b_t^2} \text{ MeV};$$

$b_c$ ,  $b_t$  in  $10^{-13}$  cm.

$s_c$  ist definiert als diejenige Zahl, durch die ein gegebenes Zentralpotential dividiert werden muß, damit es als niedrigsten Energieniveau  $E = 0$  liefert.

Der Parameter der Tripletzt-Potentialtiefe der Zentralkraft,  $s_{\text{ct}}$ , läßt sich mit Hilfe der Tabelle von KALOS aus dem Singulettparameter  $s_{\text{cs}}$  berechnen. Wie man aus ihr ersieht, erhält man hinreichend gute Werte für  $a_s$  und  $r_{\text{os}}$  bei  $s_{\text{cs}} = 0,93$ , fast unabhängig von  $b_c$ .

Wegen

$$\frac{s_{\text{cs}}}{s_{\text{ct}}} = \frac{w + m - b - h}{w + m + b + h}$$

wird mit  $b + h = 0,19$ :  $s_{\text{ct}} = 1,5$ . (5)

Nun müssen noch die beiden Reichweiten  $b_c$  und  $b_t$  so gewählt werden, daß  $Q$ ,  $r_{\text{ot}}$  und  $a_t$  richtig herauskommen.

In Abb. 1 sind nach Angaben der Tabelle diejenigen Wertepaare ( $b_c$ ,  $b_t$ ) aufgetragen, die

1. richtiges  $Q$  (—)
2. richtiges  $r_{\text{ot}}$  (---)
3. richtiges  $a_t$  (— — — —)

ergeben.

Die Kurven schneiden sich bei (0,5; 1,4). Für dieses Wertepaar besteht also beste Übereinstimmung mit dem Experiment.

Die berechneten Termschemata von Li<sup>6</sup> mit  $s_{\text{ct}} = 1,5$  (siehe Abb. 3, Spalten 2–7) zeigen immer noch eine zu niedrige Lage (relativ zum Grundniveau) der beiden tiefsten Terme mit  $T = 1$ . Eine wesentliche Verbesserung ließe sich nur durch eine weitere Erhöhung von  $s_{\text{ct}}$  erreichen. Dann würde jedoch die prozentuale D-Beimischung  $p^D = 0$  werden, was wegen des vorhandenen Quadrupolmoments sicher falsch wäre.

Ohnehin liegt  $p^D$  für die nunmehr gewählten Parameter sehr niedrig ( $0,5\% < p^D < 1\%$ ). Andererseits ist der Wert experimentell nur innerhalb sehr weiter Grenzen bestimmbar. In dem Falle, daß relativistische Effekte vernachlässigbar wären, könnte man  $p^D$  aus den bekannten magnetischen Momenten des

<sup>18</sup> S. HOCHBERG, H. S. W. MASSEY et al., Proc. Phys. Soc., Lond. A **68**, 746 [1955].

<sup>19</sup> J. M. BLATT u. J. D. JACKSON, Phys. Rev. **76**, 18 [1949].

<sup>20</sup> J. M. BLATT u. H. WEISSKOPF, Theor. Nuclear Phys. S. 48 ff.

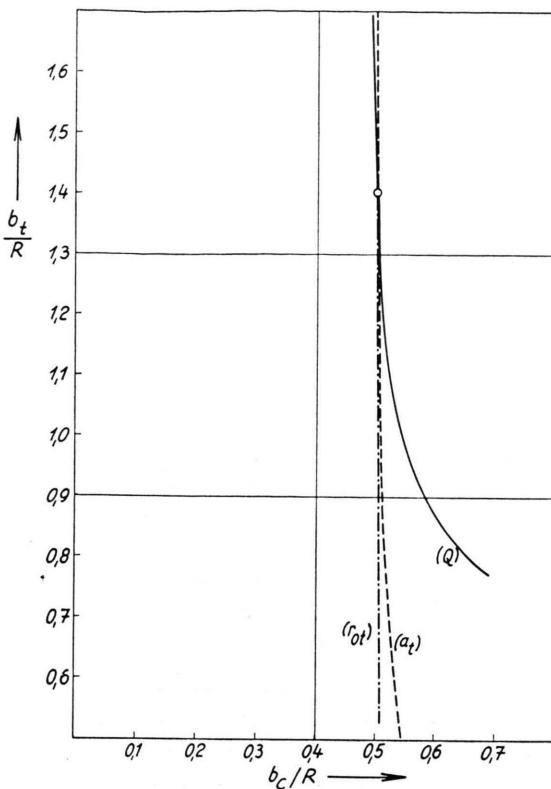


Abb. 1. Reichweite der Tensor- und Zentralkräfte für richtiges  $Q$ ,  $r_{\text{rot}}$ ,  $a_t$ .  $s_{\text{c(t)}}=1,5$ .

Neutrons, Protons und Deuterons berechnen:

$$\mu_N + \mu_P - \mu_D = \frac{3}{2}(\mu_N + \mu_P - \frac{1}{2}) \cdot p^D \rightarrow p^D = 3,9\%.$$

Man hat aber mit einer relativistischen Korrektion von der Größenordnung dieser Differenz zu rechnen<sup>21</sup>.

Die bisher festgelegten Parameter ergeben wegen der Bindungsenergie von  $H^2$   $s_t = 0,48$  (KALOS) und damit

$$V_c = 73,8 \text{ MeV}, \quad \beta^{-1/2} = 1,503 \cdot 10^{-13} \text{ cm}; \\ V_T = 3,02 \text{ MeV}, \quad \beta'^{-1/2} = 4,20 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Zur Berücksichtigung der Symmetrie in der Winkeverteilung bei Streuung von hochenergetischen Neutronen an Protonen führen wir mit FERRELL und VISSCHER die Bedingung ein<sup>9</sup>

$$w - m - b + h = 0. \quad (6)$$

<sup>21</sup> G. BREIT u. I. BLOCH, Phys. Rev. **72**, 135 [1947]. — H. PRIMAKOFF, Phys. Rev. **72**, 118 [1947]. — R. G. SACHS, Phys. Rev. **72**, 91 [1947]. — H. MARGENAU, Phys. Rev. **57**, 383 [1940]. — P. CALDIROLA, Phys. Rev. **69**, 608 [1946].

Hierdurch verschwindet das Wechselwirkungs-Potential für Partial-Wellen mit ungeradem Bahndrehimpuls  $l$  bei der Singulettstreuung, so daß für diesen Fall genaue Symmetrie erreicht wird, denn Tensorkraft und SB-Kopplung spielen hier ja keine Rolle.

Die Bedingung ist nicht ganz so scharf wie die SERBER-Bedingung  $w = m$ ,  $b = h$ . Jedoch wird man verlangen müssen, daß auch diese wenigstens in gewisser Näherung erfüllt ist, denn etwa  $3/4$  des Streuquerschnittes stammen von der Triplettstreuung (das statistische Gewicht des Triplettzustandes ist gleich 3, das des Singulettzustandes 1).

Aus (4), (5) und (6) folgt

$$m = 0,81 - w, \quad b = -0,31 + w, \quad h = 0,50 - w. \quad (7)$$

Die Abhängigkeit der Energieniveaus von  $w$  unter Wahrung von (7) wird am Schluß in einer Störungsrechnung untersucht werden.

Zunächst wird angesetzt

$$w = 0,43. \quad (8)$$

### b) Spin – Bahn-Kopplung

Leider gibt es noch kaum experimentelle Daten, die eine eindeutige Bestimmung der Parameter der SB-Kopplung erlauben. Die Dublettaufspaltungen bei Kernen, welche sich um ein Nukleon von magischen Kernen unterscheiden, sind praktisch unabhängig von dem übrigen Anteil der Wechselwirkung. Sie kämen deshalb besonders für eine solche Festlegung in Frage. Nun sind aber die Zustände von  $He^5$  und  $Li^5$  nicht als echt gebunden anzusehen<sup>22</sup>, und die Termschemen von  $O^{17}$  und entsprechenden schwereren Kernen sind nicht genügend bekannt.

Einen Anhaltspunkt liefern die Spiegelkerne  $N^{15}$  und  $O^{15}$ . Man kennt bei ihnen beiden Zustände in Höhe von 6,3 und 7,6 MeV, von denen mit größter Wahrscheinlichkeit einer zusammen mit dem Grundzustand das Dublett  ${}^2P_{1/2} - {}^2P_{3/2}$  bildet. Beide Möglichkeiten werden in der Rechnung ausprobiert.

Eine weitere Bedingung für die Spin – Bahn-Kopplung erhält man aus der Energiedifferenz zwischen den Zuständen mit  $J = 2$  und  $J = 3$ ,  $T = 0$  bei  $Li^6$ , zumal dieser Betrag nicht von den Zentralkräften abhängt.

<sup>22</sup> Nur durch eine Analyse der  $p - \alpha$ -Streuung ließen sich hier Aussagen über die SB-Kopplung machen. Siehe MASSEY et al.<sup>18</sup> u. v. d. SPUY<sup>23</sup>.

<sup>23</sup> E. v. d. SPUY, Nucl. Phys. **1**, 381 [1956].

Drittens wird die Differenz der beiden niedrigsten Energien von  $\text{Li}^7$  benutzt ( ${}^2\text{P}_{1/2} - {}^2\text{P}_{3/2}$ <sup>24</sup>). Da dieser Abstand sehr genau gemessen worden ist, und ferner nach den Endergebnissen das Schalenmodell für  $\text{Li}^7$  eine bessere Näherung darstellt als für  $\text{Li}^6$ , ist dies wohl die genaueste Information, die wir über die SB-Kopplung bisher besitzen.

Das nächsthöhere Dublett von  $\text{Li}^7$  ( ${}^2\text{F}_{7/2} - {}^2\text{F}_{5/2}$ ) können wir nicht gebrauchen, da die Störungsrechnung zeigt, daß seine Aufspaltung nicht nur von der SB-Wechselwirkung, sondern auch empfindlich von  $w$  abhängt. Dies ist offenbar darauf zurückzuführen, daß an dem niedrigsten Zustand mit  $J = 5/2$  der entsprechende der LS-Kopplung nur zu etwa 34% beteiligt ist, während dies für die drei tiefsten Niveaus von  $\text{Li}^7$  zu fast 90% gilt (ganz abgesehen davon ist auch nicht genau zu übersehen, in welchem Maße höhere Konfigurationen das  ${}^2\text{F}$ -Dublett beeinflussen).

### c) Vielkörperkräfte

Die Austauschkräfte sind ursprünglich eingeführt worden<sup>25</sup>, um u. a. die Sättigung bei schweren Kernen zu erklären. Die Parameter (7) und (8) erfüllen aber nicht die dazu notwendigen Sättigungsbedingungen<sup>26</sup>. Die Bindungsenergien und Dichten der schweren Kerne werden also zu groß, wenn man nicht zusätzlich ein abstoßendes Potential für kleine Nukleonabstände einführt.

Es ist zu vermuten, daß die Wechselwirkung der Nukleonen durch eine nichtlineare Feldtheorie zu beschreiben ist<sup>27</sup>. In dem Fall würden sich die Potentiale zwischen den einzelnen Nukleonpaaren nicht additiv superponieren, sondern es wären zusätzlich Vielkörperkräfte zu erwarten, die sich vor allem in schweren Kernen auswirken würden, so daß man die Sättigungserscheinungen möglicherweise ihnen zuzuschreiben hat.

Bei dem gegenwärtigen Wissensstand gibt es zahllose Möglichkeiten für die Struktur, die diese Kräfte haben könnten. Deshalb soll hier am Schluß der Rechnungen nur untersucht werden, welchen Einfluß ein  $\delta$ -artiges abstoßendes zentrales Dreikörperpoten-

tial auf die Termabstände von  $\text{Li}^6$  und  $\text{Li}^7$  haben würde. Ein solcher Ansatz ist offenbar der einfachste, der sich angesichts der sehr komplizierten Rechnungen, die sonst nötig wären, machen läßt. Er ist anzusehen als eine summarische Berücksichtigung aller derjenigen Potentiale, welche sich auf eine zu große Annäherung der Nukleonen aneinander energetisch ungünstig auswirken<sup>28</sup>.

Er hat die Form

$$W_{(3)}(1, 2, 3) = V_{(3)} \cdot r_e^{-6} \cdot \delta(r_{12}) \delta(r_{13}), \quad (9)$$

$V_{(3)} = 2,17 \text{ MeV}$ ;  $r_e = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  (Klass. Elektronenradius).

Die Stärke  $V_{(3)}$  ist so angesetzt, daß sich für  $\text{He}^4$ ,  $\text{Li}^6$  und  $\text{Li}^7$  ungefähr die richtige Bindungsenergie ergibt, sofern man für die Zweikörperkräfte die in diesem Paragraphen festgelegten Parameter nimmt.

## § 3. Die räumliche Ausdehnung der Wellenfunktionen

Bei Benutzung von Oszillatorenfunktionen bleibt als einziger Parameter  $\alpha^{-1/2}$  noch offen, der als Maß für die räumliche Ausdehnung der Wellenfunktionen zu betrachten ist. Es liegt an sich nahe, ihn durch ein Ritzsches Variationsverfahren zu bestimmen. Das wird aber unterlassen, weil

1. der Wert von  $\alpha$  kritisch davon abhängt, wie gut das Verfahren ohne explizite Abspaltung der Schwerpunktskoordinaten wirklich ist; die Unsicherheit wird besonders groß durch die Tatsache, daß sich die Bindungsenergie als relativ kleine Differenz großer Werte ergibt,

2.  $\alpha$  hier empfindlich ist gegenüber Änderungen im Ansatz der Wechselwirkung.

Die Unsicherheitsfaktoren sind nicht so groß, wenn man zur Festlegung von  $\alpha$  die COULOMBSche Energiedifferenz

$$\Delta E_{\text{coul}} = E_{\text{coul}}(A, Z+1) - E_{\text{coul}}(A, Z)$$

zwischen Zuständen heranzieht, die zum gleichen Ladungsmultiplett gehören. Die Rechnungen im weiteren Verlauf der Arbeit stützen sich deshalb auf die so erhaltenen Werte.

sind als etwa  $0,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ . Ob sich eine solche Annahme auf die Berechnung der Energieniveaus ähnlich auswirken würde wie der hier benutzte Ansatz, ist wegen der unendlich großen Matrixelemente des „hard core“ schwer zu übersehen. Man muß damit rechnen, daß die dann hinzukommenden Korrelationen zwischen den Nukleonen zu einer starken Beimischung höherer Konfigurationen führen würden.

<sup>24</sup> Abb. 3, Spalte 7 (endgültiger Kraftansatz).

<sup>25</sup> W. HEISENBERG, Z. Phys. 77, 1 [1932].

<sup>26</sup> G. BREIT u. E. P. WIGNER, Phys. Rev. 53, 998 [1938].

<sup>27</sup> W. HEISENBERG, Theorie des Atomkerns, Dokumentationsstelle der Max-Planck-Ges., Göttingen 1951, S. 65.

<sup>28</sup> Seit einigen Jahren wird von K. BRUECKNER et al. ein sog. „hard core“ angenommen, d. h. ein unendlich hohes abstoßendes Potential für Nukleonabstände, die kleiner

$\Delta E_{\text{coul}}$  lässt sich aus den gemessenen Maximalenergien bei  $\beta$ -Zerfällen bestimmen, wenn man voraussetzt, daß sich innerhalb eines Ladungsmultipletts die Struktur der Wellenfunktionen, insbesondere deren Ausdehnung, infolge der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton oder umgekehrt nicht ändert. Hier geht also die Hypothese von der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte wieder ein. Die Energiedifferenz  $E_{Z+1} - E_Z$  zwischen solchen Zuständen stammt dann nur von der elektrostatischen Abstößung und von der Differenz  $(M_N - M_H) c^2$ . ( $M_N$ ,  $M_H$  Ruhemassen des Neutrons und des H-Atoms.)

So ergibt sich der empirische Wert von  $\Delta E_{\text{coul}}$ :

$$\Delta E_{\text{coul}} = E_{Z+1} - E_Z + (M_N - M_H) c^2. \quad (10)$$

Wenn man die Wellenfunktionen (bis auf ihre Ausdehnung) kennt, findet man andererseits unter den gleichen Voraussetzungen wie oben einen theoretischen Ausdruck für  $\Delta E_{\text{coul}}$ , der von  $\alpha$  abhängt. Durch Gleichsetzen mit dem empirischen Wert von  $\Delta E_{\text{coul}}$  lässt sich dann  $\alpha$  berechnen.

Bei  $\text{Li}^6$ ,  $\text{N}^{14}$  und  $\text{N}^{15}$  sind die Ausdrücke unabhängig von  $J$  und  $T$ , da es sich um die zentrale Wechselwirkung eines Einzelteilchens bzw. „loches“ mit einer abgeschlossenen Schale handelt. Als Wellenfunktion von  $\text{Li}^7/\text{Be}^7$  wurde wiederum der niedrigste Zustand bei LS-Kopplung genommen. Für  $A=13$  hängt das Ergebnis zu empfindlich davon ab, welche Annahme man im einzelnen über die Wellenfunktionen macht. Rechnungen von KURATH<sup>3</sup> für eine homogen geladene Kugel lassen keinen wesentlichen Unterschied zwischen der Ausdehnung von  $\text{N}^{13}$  und  $\text{N}^{14}$  erkennen.

Für  $A=4, 6, 7, 14$  und  $15$  sind die Ergebnisse in Tab. 1 zusammengestellt.

$A$	$\alpha^{-\frac{1}{2}} / 10^{-13} \text{ cm}$ nach der RITZSchen Methode <sup>29</sup>	$\alpha^{-\frac{1}{2}} / 10^{-13} \text{ cm}$ nach COULOMB- Energien	Berechnet aus der Reaktion
4	1,23		
6	1,35	2,12 s. Anm. <sup>9</sup>	$\text{He}^6 \xrightarrow{\beta^-} \text{Li}^6$
7	1,36	1,63	$\text{Be}^7 \xrightarrow{\text{K}} \text{Li}^7$
14		1,60 s. Anm. <sup>9</sup>	$\text{O}^{14} \xrightarrow{\beta^+} \text{N}^{14}$
15		1,67	$\text{O}^{15} \xrightarrow{\beta^+} \text{N}^{15}$

Tab. 1.

<sup>29</sup> Auch hier wurde statt eines „hard core“ der in § 2 erläuterte Potentialansatz zur Berechnung verwendet.

Da  $\alpha$  für  $A=7, 14$  und  $15$  wenig Unterschiede zeigt, wurde in dieser Arbeit einfacheitshalber  $\alpha^{-\frac{1}{2}} = 1,63 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  für diese Kerne und  $A=13$  angesetzt.

Die beiden Zahlwerte für  $A=7$  stimmen immerhin bis auf einen Faktor 1,2 miteinander überein. Die Ausdehnung von  $\text{Li}^6$  dagegen ist nach der COULOMBSchen Energiedifferenz außerordentlich groß. Es ist zu beachten, daß 2,12 sich auf den 2. angelegten Zustand dieses Kernes bezieht, während der Wert 1,35 für den Grundzustand berechnet worden ist. Vermutlich ist dies physikalisch begründet. Das theoretisch berechnete Quadrupolmoment<sup>30</sup> von  $\text{Li}^6$  würde dem experimentellen Wert viel näher kommen, wenn man  $\alpha_6^{-\frac{1}{2}} = 1,35 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  annähme, da  $Q$  proportional zu  $\alpha^{-\frac{1}{2}}$  ist:

Mit  $\alpha_6^{-\frac{1}{2}} = 2,12 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  ergibt sich

$$Q = 0,0056 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2,$$

mit  $\alpha_6^{-\frac{1}{2}} = 1,35 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  ergibt sich

$$Q = 0,0023 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2,$$

während experimentell  $Q \approx 0,001 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$

beträgt.

Auch das Ergebnis, daß in allen berechneten Termschemata von  $\text{Li}^6$  (s. Abb. 3) der Grundzustand energetisch zu hoch liegt, ließe sich mit Hilfe der Annahme einer kleineren räumlichen Ausdehnung im Grundzustand wenigstens teilweise korrigieren.

Die starke Variation von  $\alpha$  innerhalb des niedrigsten Anregungsbereiches von  $\text{Li}^6$  läßt es dann immerhin fraglich erscheinen, ob hier das Schalenmodell gut brauchbar ist.

#### § 4. Berechnung der Zustände

Die Energiewerte und Zustände der untersuchten Kerne sind mit Hilfe des von SCHULTEN<sup>1</sup> beschriebenen Verfahrens in der  $jj$ -Darstellung berechnet worden. Man erhält dieselben Säkulargleichungen, wenn man eine SCHRÖDINGERSche Störungsrechnung für den entarteten Fall durchführt, sofern die Differenz zwischen dem Oszillatortpotential und den individuellen Wechselwirkungen der Nukleonen als Störung angesehen wird.

Wir wollen abschätzen, für wie hohe Anregungsenergien man sich dabei auf die 2p-Schale beschränken darf.

<sup>30</sup> Siehe Tab. 3.

Wegen

$$\alpha = m \omega / \hbar$$

entspricht einem Wert von  $\alpha^{-1/2} = 1,7 \cdot 10^{-13}$  cm ein Oszillatorenpotential mit  $\hbar \omega = 14$  MeV (vorausgesetzt, daß  $\alpha^{-1/2} = 1,7 \cdot 10^{-13}$  cm auch für so hoch angeregte Zustände noch ungefähr gilt). Diese Energie wäre also nötig, um ein Teilchen in die nächsthöhere Schale zu „heben“. Dadurch würde sich aber die Parität ändern. Da Zustände mit entgegengesetzter Parität nicht miteinander in Wechselwirkung stehen, läge die nächste für uns in Frage kommende Konfiguration um weitere 14 MeV höher.

In dieser Größenordnung liegen zum Teil aber auch die Differenzen zwischen den höchsten und niedrigsten Eigenwerten der in dieser Arbeit auftretenden Säkulardeterminanten. Es ist deshalb nicht erstaunlich, daß in den experimentell bekannten Termschemata z. B. bei Li<sup>7</sup> die ersten Niveaus entgegengesetzter Parität etwa 6,5 MeV, bei N<sup>13</sup> sogar nur 2,4 MeV über dem Grundzustand liegen, statt 14 MeV.

Bereits in einer Höhe von ungefähr 10 MeV wird man dann wohl Zustände gleicher Parität, aber angeregten Konfigurationen entsprechend, zu erwarten haben, so daß allenfalls ganz niedrige Eigenwerte unserer Rechnung berücksichtigt werden dürfen. Man muß also mit der Anwendung des Schalenmodells sehr vorsichtig sein.

Die Kerne am Schluß der 2p-Schale lassen sich für 1- und 2-Körper-Potentiale in ganz ähnlicher Weise berechnen wie die am Anfang<sup>31</sup>. Nur für die Drei-Körper-Kräfte wird die Rechnung bei Kernen mit fast aufgefüllter Schale so schwierig, daß sie hier leider unterbleiben mußte.

## § 5. Diskussion der Ergebnisse

### a) Energieniveaus

In Abb. 3 sind die Energieschemata für Li<sup>6</sup>, Li<sup>7</sup>/Be<sup>7</sup>, C<sup>13</sup>/N<sup>13</sup> und N<sup>14</sup> zusammengestellt. Spalte (0) zeigt jeweils die experimentell bekannten Niveaus<sup>6</sup>. Solche mit „falscher“ Parität (d. h.  $P = (-1)^{A+1}$ , siehe Anm.<sup>11</sup>) sind gestrichelt eingezeichnet. Die erste Zahl gibt die Höhe über dem Grundzustand in MeV, die zweite den Spin  $J$  und die dritte den Isotopenspin  $T$  jedes Zustandes an. Nicht mit volliger Sicherheit bekannte Daten sind in Klammern gesetzt.

Die dann folgenden Spalten zeigen die theoretisch berechneten Niveaus für verschiedene Poten-

<sup>31</sup> W. HEISENBERG, Ann. Phys., Lpz. **10**, 888 [1931].

tialansätze. Die dazugehörigen Parameter sind in Tab. 2 aufgeführt. Als Energienullpunkt wurde immer die Höhe desjenigen Zustandes gewählt, welcher auf Grund seines Wertes von  $J$  und  $T$  dem experimentell bekannten Grundzustand entspricht. Es tritt daher nur die potentielle Energie auf. Die kinetische Energie ist für alle behandelten Zustände je eines Kernes gleich, da wir immer in derselben Schale bleiben.

Die verschiedenen theoretischen Schemata sollen ein Bild von der Abhängigkeit der Niveaustände von verschiedenen Parametern der Nukleonenwechselwirkung geben. Die Schemata gliedern sich in drei Gruppen:

I. Ansatz (1); II. Ans. (2) – (3); III. Ans. (4) – (7).

Die Gruppen unterscheiden sich voneinander im wesentlichen durch die Annahmen über die Zentralkräfte.

Innerhalb einer Gruppe unterscheiden sich die Ansätze nur durch die Spin – Bahn-Kopplung. Grundsätzlich wurde diese so festgelegt, daß sich der Abstand der Niveaus von Li<sup>6</sup> mit  $J=2$  und  $J=3$  ( $T=0$ ) und die Dublettaufspaltung bei N<sup>15</sup> richtig ergeben.

Spalte 1 zeigt ein Schema, das mit  $w+m=1$ ,  $b+h=0$  berechnet worden ist. Man sieht, daß die Terme mit  $T=1$  bei Li<sup>6</sup> und N<sup>14</sup> so niedrig liegen, daß sich bei diesen Kernen für den Grundzustand  $J=0$ ,  $T=1$  statt  $J=1$ ,  $T=0$  ergibt.

Die Schemata von Spalte 2 und 3 beruhen auf einem Ansatz, in dem zwar  $m+w \approx 0,8$  ist, aber die Reichweiten der Zentral- und Tensorkräfte etwas „konservativer“ gewählt sind (SCHULTEN hat  $\beta^{-1/2} = \beta''^{-1/2} = 1,9$ ; FERRELL  $\beta^{-1/2} = \beta'^{-1/2} = \beta''^{-1/2} = 1,73$ ; v. d. SPUY<sup>23</sup>  $\beta^{-1/2} = \beta''^{-1/2} = 1,87 \cdot 10^{-13}$  cm). Dann ergibt sich  $p^D \approx 2\%$ ; jedoch fallen  $|r_{\text{ot}}|$  und  $|a_t|$ , die man im Gegensatz zu  $p^D$  aus den Experimenten ziemlich genau kennt, mit diesem Ansatz zu groß aus. Dies und die verhältnismäßig mangelhafte Übereinstimmung der hiermit berechneten Energieschemata mit dem Experiment lassen vermuten, daß der Ansatz wegen der zu großen Reichweite der Zentralkräfte nicht gut ist.

Die Niveauschemata 4 und 7 sind alle mit der gleichen Zentral- und Tensorkraft, aber verschiedenen Annahmen über die SB-Kopplung berechnet worden. Bei den Spalten 4 und 5 ist diese so bestimmt, daß die Dublettaufspaltung bei N<sup>15</sup> 6,33 MeV beträgt. Man sieht, daß die Aufspaltung der beiden

Ansatz Nr.	w	m	b	h	$V_C$	$\beta^{-1/2}$	$w' - m'$	$V_T$	$\beta'^{-1/2}$	$w'' - m''$	$V_{SB}$	$(w'' - m'') \cdot V_{SB}$	$\beta''^{-1/2}$	$\Delta E_{15}$	
(1)	0,50	0,50	0	0	-46,23	1,503	1,0	-24,88	2,055	-1,10	+	1,99	-2,19	3,000	6,33
(2)	0,33	0,50	0	0,17	-46,35	1,900	-1,0	-10,44	2,480	-0,57	15,59	-8,90	1,900	7,60	
(3)										-1,36	2,52	-3,43	2,480	7,60	
(4)										-2,10	0,543	-1,14	4,200	6,33	
(5)	0,43	0,38	0,12	0,07	-73,80	1,503	0	-3,02	4,200	+6,80	-0,090	-0,61	6,000	6,33	
(6)										+4,86	-0,228	-1,11	4,000	7,60	
(7)										$+\infty$	-0	-1,29	3,800	7,60	

Tab. 2. Parameter für die Wechselwirkungsansätze.  $V_{(3)}=0$  für alle Ansätze. Alle Energien in MeV, Längen in  $10^{-13}$  cm.  $\Delta E_{15}$  ist die für die Festlegung der Spin-Bahn-Kopplung zugrunde gelegte Dublettaufspaltung von  $N^{15}$  in MeV.

niedrigsten Zustände von  $Li^7$  sich zu klein ergibt, selbst wenn man  $\beta''^{-1/2} = 6,0 \cdot 10^{-13}$  cm annimmt.

Will man dagegen die Bedingung befriedigen, daß  $\Delta E$  bei  $N^{15}$  7,60 statt 6,33 MeV sei, so wird man bei  $\beta''^{-1/2} = 3,8 \cdot 10^{-13}$  cm bereits den richtigen Abstand der niedrigsten Zustände von  $Li^7$  bekommen. In dem Falle hätten also Tensorkraft und SB-Kopplung etwa dieselbe Reichweite (Spalte 6 und 7). So liegt es nahe anzunehmen, daß der Zustand mit 7,58 MeV Anregungsenergie bei  $N^{15}$  bzw. der mit 7,61 MeV bei  $O^{15}$  derjenige ist, den wir suchen. Eine experimentelle Arbeit, in der die Eigenschaften des 6,33-MeV-Niveaus mit Hilfe der Winkelverteilung bei (d,p)-Prozessen analysiert werden<sup>32</sup>, zeigt, daß dessen Parität möglicherweise positiv ist. Andererseits gibt es experimentelle Anhaltspunkte dafür, daß das 7,61-MeV-Niveau des  $O^{15}$  negative Parität und  $J \leq 5/2$  hat<sup>6</sup>.

MASSEY et al.<sup>18</sup>, v. d. SPUY<sup>23</sup> und ABRAHAM<sup>33</sup> rechnen mit gleicher Reichweite von SB-Kopplung und Zentralkraft. Es ist begreiflich, daß sie unter dieser Annahme bei der Anpassung an die Experimente einen Wert von  $\beta^{-1/2}$  erhalten, welcher zwischen  $\beta^{-1/2}$  und  $\beta''^{-1/2}$ , wie es sich in unserer Arbeit ergibt, liegt.

Die Annahme gleicher Reichweiten für diese beiden Kräfte geht im wesentlichen zurück auf eine Herleitung der SB-Kopplung aus  $\text{grad } J_c(r_{12})$ , wo  $J_c$  der ortsabhängige Anteil der Zentralkräfte ist. Das wäre analog den Verhältnissen in der Atomhülle. Aus einer vektoriellen Mesonentheorie findet z. B. GAUS<sup>34</sup> für diese Kopplung:

$$\begin{aligned} W_{SB}(1,2) &= -\frac{\varkappa V_c}{2 \hbar \beta} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \\ &\cdot \{ [\text{grad}_1 J_c(r_{12}) \times \vec{p}_1] + [\text{grad}_2 J_c(r_{12}) \times \vec{p}_2] \} \\ &= -2 \varkappa V_c \frac{\partial J_c}{\partial (r_{12}^2)} \frac{1}{\hbar \beta} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2, \vec{l}_{12}); \\ \vec{l}_{12} &= -i \hbar [r_{12} \times \nabla_{r_{12}}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Da es jedoch noch keine „endgültige“ Mesonentheorie der Kernkräfte gibt, läßt sich der Ursprung der SB-Kopplung und damit ihre Reichweite noch nicht definitiv theoretisch begründen. Man wird sich also vorläufig damit begnügen müssen, mit einem Ansatz zu rechnen, der die üblichen Invarianzforderungen erfüllt und die experimentell bekannten Termaufspaltungen möglichst gut wiedergibt, wie es in dieser Arbeit durchgeführt worden ist.

In Abb. 2 sind  $w'' - m''$ ,  $V_{SB}$  und die  $^2P$ -Aufspaltung von  $Li^7$ ,  $\Delta E_7$ , in Abhängigkeit von  $\beta''^{-1/2}$  dargestellt, wobei sich die Beziehungen zwischen diesen Größen aus den Nebenbedingungen für  $Li^6$  und  $N^{15}$  (7,6 MeV) sowie der für Ansatz 6/7 festgelegten Tensorkraft ergeben. Die Anpassung an  $Li^7$  zeigt dann (Ansatz 7), daß wir ziemlich genau

$$w'' - m'' = \infty, \quad V_{SB} = 0,$$

$$V_{SB}(w'' - m'') = -1,29 \text{ MeV} \quad (\text{Abb. 2}) \text{ haben.}$$

Für diese Parameter zeigt die (hier nicht wiedergegebene) Rechnung, daß sich auf die Kerne am Anfang und am Ende der 2p-Schale unser Zweiteilchen-Ansatz ähnlich auswirkt wie eine formale Ein-Teilchen-Spin-Bahn-Kopplung. Es läßt sich deshalb eine Größe  $a'$  berechnen, die sich mit dem von INGLIS als  $a$  bezeichneten Parameter vergleichen läßt.

<sup>32</sup> J. EVANS, Proc. Phys. Soc., Lond. A **66**, 1 [1953].

<sup>33</sup> G. ABRAHAM, Nucl. Phys. **1**, 415 [1956].

<sup>34</sup> H. GAUS, Z. Naturforsch. **7a**, 44 [1952].

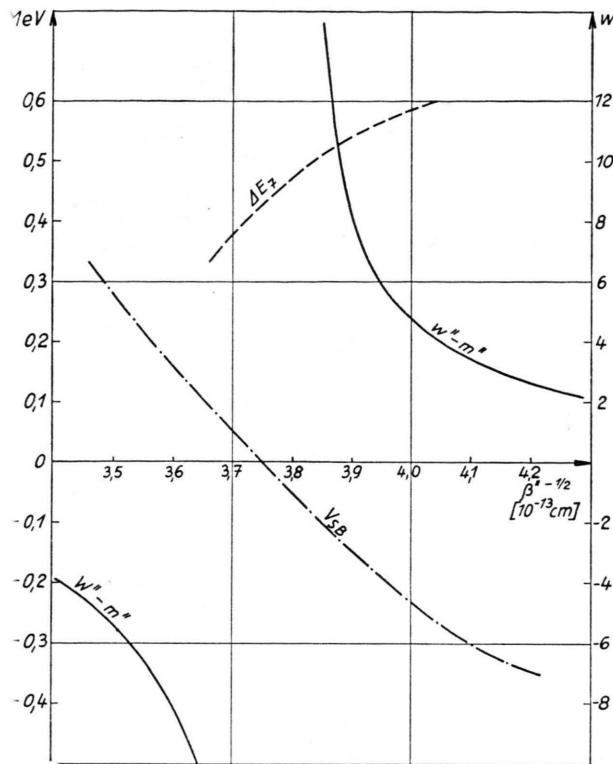


Abb. 2. Parameter der Spin-Bahn-Kopplung.

Das Ergebnis ist

$$\frac{a'}{K} = \begin{cases} 6 \frac{I_1''(w''-m'')}{K} = \begin{cases} 2,1 & \text{für Li}^6, \\ 2,3 & \text{für Li}^7; \end{cases} \\ -9 \frac{I_1''(w''-m'')}{K} = -3,6 \quad \text{für } 13 \leq A \leq 15. \end{cases}$$

$I_1''$  ist ein Radialintegral über den Ortsanteil der Wechselwirkung.

Die entsprechenden Werte waren bei INGLIS und KURATH  $a/K = 1 - 2$  bei Li und ca.  $-5$  beim Ende der Schale.

Bevor wir das „endgültige“ (bis auf die Dreikörperkraft) Schema (7) besprechen, wollen wir die Ergebnisse der übrigen Ansätze noch im einzelnen betrachten.

Bei  $\text{Li}^6$  ist die Empfindlichkeit der Niveauabstände gegenüber Veränderungen im Ansatz auffallend gering, abgesehen von Ansatz (1). Die Reihenfolge der Terme  $(2; 0)$  und  $(2; 1)$  ist durchweg anscheinend falsch. Das braucht nicht an einem Mangel des Modells zu liegen. Die Kurven von INGLIS<sup>2</sup> für diesen Kern zeigen, z. B. im Gegensatz zu  $\text{Li}^7$ , daß aus

mathematischen Gründen hier mit einer Vertauschung der Reihenfolge zu rechnen ist.

Für  $\text{Li}^7$  zeigen Spalten (2) und (3) nur grobe Übereinstimmung mit der Erfahrung. Der 2. angelegte Zustand liegt, fast unabhängig von der SB-Kopplung, zu tief. Durch Einführung der Dreikörperkraft würde sich seine Höhe noch weiter verringern. Im Vergleich zu (2) – (3) entsprechen die Ansätze (4) – (7) bei geeigneter Wahl der SB-Kopplung [man interpoliere zwischen (4) und (5)] der Erfahrung viel besser.

Ähnliches zeigt ein Vergleich bei  $\text{N}^{13}$ . Hier liegt bei (2) und (3) das Niveau mit  $J = 5/2$  anscheinend viel zu niedrig. Eine kleine Verbesserung könnte durch Wahl von  $w' - m' = 0$  statt  $-1$  erreicht werden. Das Niveau mit  $J = 3/2$  liegt bei passender Wahl der SB-Kopplung ungefähr richtig. Die Vertauschung der Reihenfolge der beiden niedrigsten Zustände bei Ansatz (2) ist auf den Einfluß der SB-Wechselwirkung zwischen den drei „Löchern“ der 2p-Schale zurückzuführen. Infolge eines großen Koeffizienten in dem maßgebenden Matrixelement wirkt sich dieser Teil hier stärker aus als die „quasi-Ein-Teilchen-SB-Kopplung“.

Bei  $\text{N}^{14}$  liegt in (2) und (3) der Zustand mit  $J = 0, T = 1$  zu hoch. Durch  $w' - m' = 0$  statt  $-1$  könnte man hier eine wesentliche Korrektion erreichen. Die zu große Höhe des angeregten Niveaus mit  $J = 1, T = 0$  ließe sich jedoch dadurch nicht ändern. In Spalte (4) bis (6) liegt dieser Zustand dagegen zu tief.

Es sollen nun die Ergebnisse von Spalte 7, Abb. 3, für die einzelnen Kerne besprochen werden.

### Li<sup>6</sup>

Man sieht sofort, daß das berechnete Energieschema von  $\text{Li}^6$  im Vergleich zum Experiment sehr viel unbefriedigender ist als bei den anderen Kernen, und zwar ziemlich unabhängig vom Potentialansatz. Offenbar liegt der Grundzustand energetisch zu hoch, während sich besonders die beiden tiefsten Zustände mit  $T = 1$  zu niedrig ergeben.

Wegen der niedrigen Massenzahl dieses Kernes wird es sich hier besonders stark auswirken, daß die Schwerpunktskoordinaten nicht explizit abgespalten worden sind. MORITA und TAMURA<sup>35</sup> haben dies in ihren Rechnungen unter Verwendung gruppentheoretischer Methoden durchgeführt. Sie erhalten trotzdem eine viel zu niedrige Lage des zweiten angeregten Zustandes. Teilweise wird dies jedoch an der Wahl ihrer Koeffizienten liegen:  $w = 1, m = b = h = 0$ . Mit  $w + m = 0,8$  wäre das Ergebnis sicher besser ausgefallen (s. S. 299, linke Spalte).

<sup>35</sup> M. MORITA u. T. TAMURA, Prog. Theor. Phys. 12, 653 [1954].

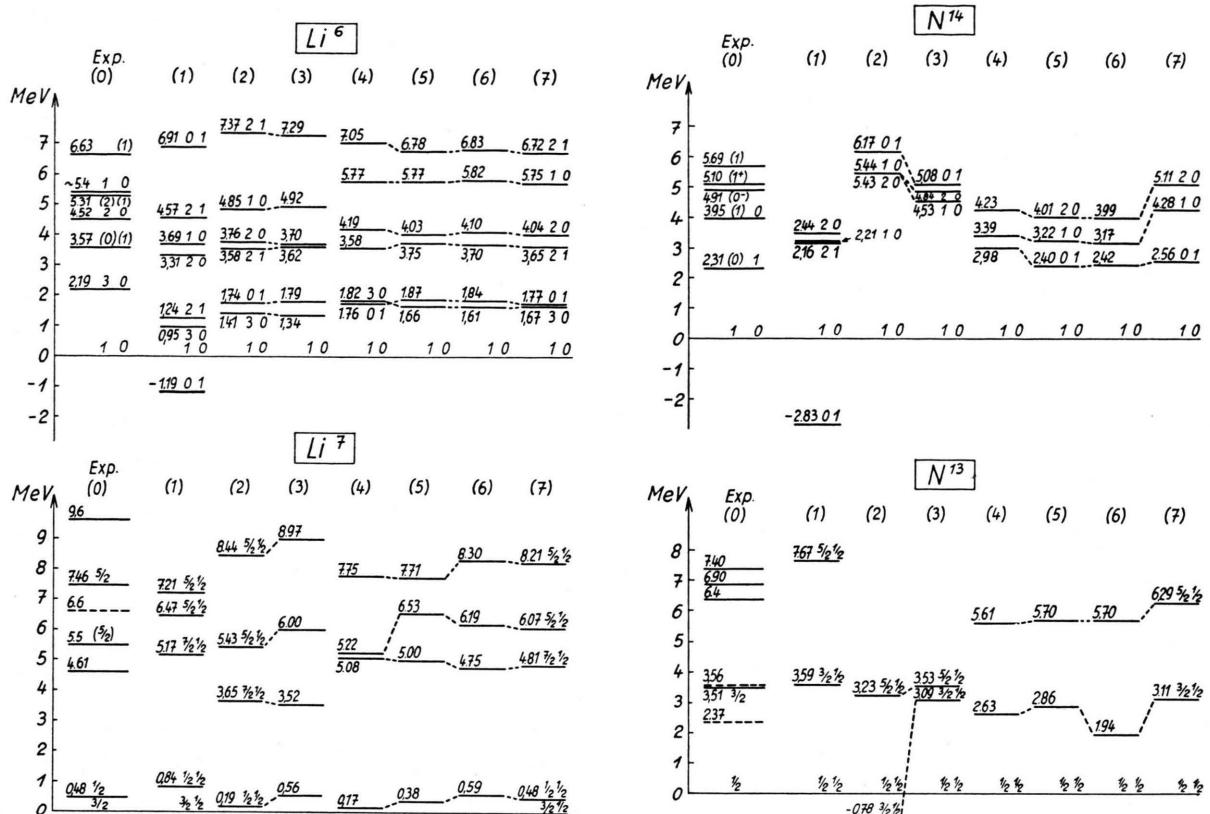


Abb. 3. Energieschemata.

Die auffallend große räumliche Ausdehnung der Wellenfunktion dieses Zustandes, wie sie sich aus der COULOMBSchen Energiedifferenz zu He<sup>6</sup> ergibt (s. S. 302), weist darauf hin, daß das Schalenmodell selbst hier keine genügend gute Näherung darstellt. Diese Vermutung wird dadurch verstärkt, daß die Ablösearbeit eines Deuterons von Li<sup>6</sup> erfahrungsgemäß nur 1,44 MeV beträgt. Wahrscheinlich lassen sich die Wellenfunktionen von Li<sup>6</sup> zum Teil darstellen als Zusammensetzung eines Deuterons mit einem  $\alpha$ -Kern, wobei die Strukturen der beiden Bestandteile weitgehend erhalten bleiben.

### Li<sup>7</sup>

Im Termschema von Li<sup>7</sup> zeigt sich ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem von INGLIS und KURATH. Bei ihnen lag der 4. angeregte Zustand ( $J=5/2$ ,  $T=1/2$ ) so hoch, daß er nicht für eine Identifizierung mit dem experimentell bekannten Niveau in Höhe von 7,46 MeV in Frage zu kommen schien.

Unser Schema legt es jedoch nahe, den berechneten Zustand ( $6,07$ ;  $5/2^-$ ;  $1/2$ ) mit dem von STOLL<sup>36</sup> gefundenen ( $5,5$ ;  $5/2?$ ; ?) und den Zustand ( $8,21$ ;  $5/2^-$ ;  $1/2$ ) mit dem bekannten ( $7,46$ ;  $5/2^-$ ; ?) zu identifizieren.

<sup>36</sup> P. STOLL et al., Nuovo Cim. **12**, 639 [1954].

Die relativ hohe Lage des 4. angeregten Zustandes bei INGLIS und KURATH ist zum Teil damit zu erklären, daß sie keine 2-Körper-SB-Wechselwirkung und keine Tensorkraft verwendet haben. Eine Untersuchung der Matrixelemente  $V_{11}$  und  $V_{22}$ , von Li<sup>7</sup> ( $5/2$ ;  $1/2$ ), die für den Abstand zwischen dem 3. und 4. angeregten Zustand besonders maßgebend sind, läßt auf Grund der Koeffizienten für diesen Teil der Wechselwirkung erwarten, daß sich durch sie eine Differenz von mindestens 1 MeV gegenüber KURATH ergibt.

Eine weitere Differenz kann sich noch aus der Tatsache ergeben, daß die von KURATH benutzten Parameter nicht den Bedingungen (7) genügen. (Nach den Resultaten der Störungsrechnung, Abb. 4, ist die Energiedifferenz zwischen den beiden Niveaus mit  $J=5/2$  sehr unempfindlich gegenüber Änderungen von  $w'$ ,  $V_{(3)}$  und  $w$ , solange  $w$  nur in Übereinstimmung mit (7) variiert wird.)

Die Zustände mit  $T=3/2$  liegen bei Li<sup>7</sup> und N<sup>13</sup> so hoch ( $> 10$  MeV), daß sie für uns nicht von Interesse sind.

### N<sup>13</sup>

Die Termabstände stimmen mit den bisher gefundenen experimentellen Daten überein, im Gegensatz zu den Schemata, die (Ansatz 2; 3) mit  $\beta^{1/2} = 1,9 \cdot 10^{-13}$

cm berechnet worden sind. Das Niveau mit  $J=5/2$  liegt in einem Bereich, in dem man bereits einige Zustände (die leider noch nicht genau identifiziert sind) kennt, während es in Spalte 3 und 4 sowie bei KURATH offenbar zu niedrig liegt.

### $N^{14}$

Die drei niedrigsten Zustände geben das Experiment gut wieder. Mit praktisch allen Potentialansätzen erhält man einen Zustand (ca. 5 MeV; 2; 0), der sich anscheinend schwer mit den bisher in diesem Energiebereich gefundenen Niveaus in Einklang bringen lässt. Erst wenn diese genauer experimentell untersucht sind, wird man hier das theoretische Ergebnis werten können.

Die Abhängigkeit der Niveaus von einigen Parametern der Wechselwirkung ist mit Hilfe einer SCHRÖDINGERSchen Störungsrechnung für den nicht entarteten Fall untersucht worden. Als nullte Näherung wurden die Wellenfunktionen benutzt, die man mit dem Ansatz 5 erhält (gegenüber Ansatz 7 ergibt sich da kein wesentlicher Unterschied).

Folgende Parameter sind variiert worden:

1.  $w$  von 0,43 nach 0,53,
2.  $w' - m'$  von 0 nach 1,
- und 3.  $V_{(3)}$  von 0 nach 2,17 MeV.

Wie schon erwähnt, wird  $w$  nicht unabhängig von den übrigen Austauschgrößen geändert, sondern im Einklang mit Gl. (7).

Es wurde nur die Störung erster Ordnung berechnet:

$$\Delta E_i^{(1)} = \langle \Psi_i | \Delta V | \Psi_i \rangle = \sum_{\mu, v} b_{i_\mu}^* b_{i_v} \langle \Phi_\mu | \Delta V | \Phi_v \rangle .$$

$b_i$  ist der zum  $i$ -ten Zustand gehörige Eigenvektor im System der Annäherungsfunktionen  $\Phi$  (Anhang II). Die Auswirkungen der Störung auf die Wellenfunktion ist unbedeutend.

Abb. 4 gibt die Resultate an. Sie sind bezogen auf jeweils gleichbleibenden Grundzustand.

Sie zeigen, daß eine Vergrößerung von  $w$  die Energien bei  $Li^7$  und  $N^{14}$  im Vergleich zum Experiment günstig beeinflußt, während sie sonst wenig Änderung zur Folge hat. Überraschend ist, wie stark die  $^2F$ -Aufspaltung bei  $Li^7$  durch  $w$  bestimmt ist, während man in der Nähe der LS-Kopplung nur eine Abhängigkeit von den nicht-zentralen Kräften erwarten sollte. Die Erklärung findet sich darin, daß der dritte angeregte Zustand von  $Li^7$  nur eine 34-proz. Beimischung des entsprechenden Zustandes der LS-Kopplung hat (die drei niedrigsten Zustände dagegen zwischen 80 und 90%).

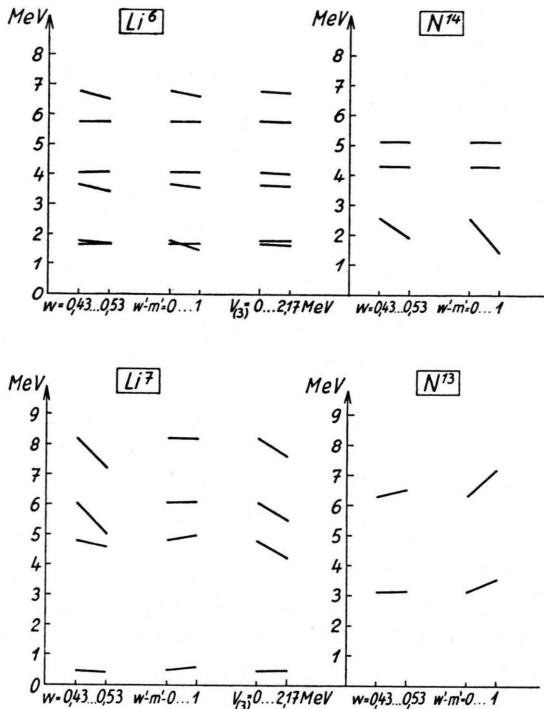


Abb. 4. Empfindlichkeit der Niveaus gegenüber Änderungen der Energieparameter.

Vergrößerung von  $w' - m'$  bewirkt bei  $Li^7$  wenig Änderung, beeinflußt  $Li^6$  günstig und die anderen Kerne ungünstig. Man kann für  $w'$  aus der Störungsrechnung also keine klaren Folgerungen ziehen.

Die abstoßende Dreikörperkraft ändert bei  $Li^6$  wenig. Das hat seine Ursache in der extrem kurzen Reichweite der Kraft und der besonders großen räumlichen Ausdehnung von  $Li^6$ .

Auch bei  $Li^7$  ist die Wirkung auf die Termabstände im Vergleich zur Änderung der Bindungsenergie (ca. 3,5 MeV) verhältnismäßig klein, aber im Vergleich zum Experiment günstig, da die etwas zu tiefe Lage der beiden niedrigsten Niveaus durch die Kraft korrigiert wird.

Man darf deshalb wohl annehmen, daß auch die Kerne am Ende der 2p-Schale zwar in bezug auf ihre Bindungsenergien, aber nicht auf ihre Termabstände wesentlich verändert werden.

### b) Momente

In Tab. 3 sind die magnetischen Dipol- und elektrischen Quadrupolmomente aufgeführt, wie sie sich als Erwartungswerte der mit Ansatz 8 berechneten

Wellenfunktionen ergeben. Auch hier wurde die Analogie zwischen Teilchen- und Löcherzuständen benutzt. Die einzige Änderung bei diesem Übergang besteht im Vorzeichenwechsel des Quadrupolmomentes.

Die magnetischen Momente weisen besonders bei Li<sup>6</sup> und Li<sup>7</sup> keine sehr großen Abweichungen von den experimentellen Werten auf. Bei Li<sup>7</sup> liegt der hier berechnete zwischen dem SCHMIDTSchen und dem experimentellen Wert, während bei C<sup>13</sup> das theoretische Moment von dem wirklichen in entgegengesetzter Richtung abweicht als das von SCHMIDT. Die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment ist übrigens erheblich größer, wenn man statt dessen die mit Ansatz 6 berechneten Wellenfunktionen zur Bestimmung der Momente benutzt.

Für die Quadrupolmomente ist der Vergleich sehr unbefriedigend. Bei Li<sup>6</sup> ist der Wert viel zu groß, und bei Li<sup>7</sup> und N<sup>14</sup> haben die theoretischen Ergebnisse nicht einmal das von den Experimentatoren angegebene Vorzeichen. Bei N<sup>13</sup> und C<sup>13</sup> verschwindet  $Q$  wegen  $J = 1/2$ , was sich allgemein für Kerne mit diesem Spin zeigen lässt. Die in diesem Fall vorhandene Übereinstimmung mit dem Experiment ist also kein Anhaltspunkt dafür, daß unsere Wellenfunktionen im einzelnen richtig sind.

Es ist schwer zu sagen, ob man die anscheinend so schlechten Ergebnisse für die Quadrupolmomente mit Kollektivbewegungen wie bei den schweren Kernen erklären kann, ob die Berechnung der Momente

aus den experimentellen Meßgrößen auf falschen Voraussetzungen beruht, oder ob die Diskrepanz auf grundlegende Mängel des Schalenmodells zurückzuführen ist. Schon durch kleine Beimischungen höherer Konfigurationen kann gerade das Quadrupolmoment stark beeinflußt werden.

### c) Der $\beta$ -Zerfall von C<sup>14</sup>

Es ist von großem Interesse zu untersuchen, ob sich die unerwartet große Lebensdauer von C<sup>14</sup> gegenüber  $\beta$ -Zerfall in N<sup>14</sup> mit Wellenfunktionen des Schalenmodells erklären läßt.

Der Grundzustand von C<sup>14</sup> hat  $J = 0$ ,  $T = 1$ , der von N<sup>14</sup>  $J = 1$ ,  $T = 0$ . Das FERMI-Matrixelement für den  $\beta$ -Übergang verschwindet wegen  $\Delta J = 1$ . Ein GAMOW – TELLER-Übergang dagegen ist an sich erlaubt. Es wäre nach der Theorie also damit zu rechnen, daß  $\log ft \approx 5$ , was einer Lebensdauer von einigen Monaten entspricht. In Wirklichkeit ist diese bekanntlich ca. 5600 Jahre, und  $\log ft \approx 9,03$ .

Beschränkt man sich auf Funktionen der 2p-Schale (LS-Darst.), so ist der Grundzustand von N<sup>14</sup> darstellbar durch

$$\Psi(1,0) = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3$$

und der von C<sup>14</sup> durch

$$\Psi(0,1) = c_4 \psi_4 + c_5 \psi_5,$$

wo

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi(^3D_1), & \psi_2 &= \psi(^1P_1), & \psi_3 &= \psi(^3S_1), \\ \psi_4 &= \psi(^3P_0), & \psi_5 &= \psi(^1S_0). \end{aligned}$$

Die  $c_i$  ergeben sich aus den Säkulargleichungen

- a)  $(H_{11} - \varepsilon_1) c_1 + H_{12} c_2 + H_{13} c_3 = 0$ ,
  - b)  $H_{12} c_1 + (H_{22} - \varepsilon_1) c_2 + H_{23} c_3 = 0$ ,
  - c)  $H_{13} c_1 + H_{23} c_2 + (H_{33} - \varepsilon_1) c_3 = 0$ ,
  - d)  $(H_{44} - \varepsilon_2) c_4 + H_{45} c_5 = 0$ ,
  - e)  $H_{45} c_4 + (H_{55} - \varepsilon_2) c_5 = 0$ .
- (12)

INGLIS<sup>2</sup> hat gezeigt, daß das GAMOW – TELLER-Übergangselement nicht zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn  $H_{13} = 0$  ist.  $H_{13}$  hängt nur von der Tensorkraft ab.

Es lassen sich für  $H_{13}$  noch schärfere Bedingungen finden. Vorausgesetzt sei wie bisher, daß keine höheren Konfigurationen wesentlich beigemischt sind, und ferner, daß  $a' > 0$ <sup>37</sup>. Dieses Vorzeichen kann auf Grund der Reihenfolge der Dublett-Terme in

Kern	$Q_{\text{ber.}}$	$Q_{\text{exp.}}$	$\mu_{\text{ber.}}$	$\mu_{\text{SCHMIDT}}$	$\mu_{\text{exp.}}$
Li <sup>6</sup>	0,0056 (0,0057)	0,001	0,842 (0,851)		0,822
Li <sup>7</sup>	-0,0166 (-0,0162)	+0,02	3,155 (3,140)	3,794	3,256
C <sup>13</sup>	0	0	0,847 (0,888)	0,638	0,702
N <sup>13</sup>	0	0	(-0,489)	-0,265	?
N <sup>14</sup>	-0,0044 (-0,0071)	+0,01	0,455 (0,526)		0,404
N <sup>15</sup>	0	0	-0,263	-0,265	-0,283

Tab. 3. Momente. Die Quadrupolmomente sind in  $10^{-24} \text{ cm}^2$ , die magnetischen Momente in Kernmagnetonen angegeben. Die nicht eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf Ansatz 7, die eingeklammerten auf Ansatz 5.

<sup>37</sup>  $a'$  ist eine für die SB-Kopplung wesentliche Größe, analog dem Parameter  $a$  bei INGLIS.

$N^{15}$  und allgemein der Arbeiten von KURATH und INGLIS als sicher angesehen werden.

Zunächst sehen wir aus Gl. (12 e), daß  $c_5/c_4 > 0$  ist, denn

$$\frac{c_5}{c_4} = -\frac{H_{45}}{H_{55}-\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{2} \cdot a'}{H_{55}-\varepsilon_2} > 0.$$

Nach INGLIS<sup>2</sup> muß

$$\frac{c_3}{c_2} \frac{c_5}{c_4} > 0 \quad \text{und damit } \frac{c_3}{c_2} > 0 \quad \text{sein.}$$

Die Gln. (12 a) und (12 c) ergeben andererseits

$$\frac{c_2}{c_3} = \frac{\begin{vmatrix} H_{11}-\varepsilon_1 & H_{13} \\ H_{13} & H_{33}-\varepsilon_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_{12} & H_{11}-\varepsilon_1 \\ H_{23} & H_{13} \end{vmatrix}} = \frac{(H_{11}-\varepsilon_1)(H_{33}-\varepsilon_1)-H_{13}^2}{V_{\frac{5}{6}} a'[-H_{13}-\sqrt{\frac{4}{5}(H_{11}-\varepsilon_1)}]}.$$
(14)

Wenn  $c_2/c_3 > 0$  sein soll, müssen Zähler und Nenner in (14) gleiches Vorzeichen haben. Dies ist erfüllt für

$$H_{13} > +\sqrt{(H_{11}-\varepsilon_1)(H_{33}-\varepsilon_1)} > 0 \quad (15)$$

und für

$$-\sqrt{(H_{11}-\varepsilon_1)(H_{33}-\varepsilon_1)} < H_{13} < -\sqrt{\frac{4}{5}(H_{11}-\varepsilon_1)} < 0. \quad (16)$$

(15) entspricht der Bedingung, daß  $V_T$  und  $\beta'^{-1/2}$  sehr groß seien, (16) der Bedingung, daß  $V_T$  sehr groß und  $\beta'^{-1/2}$  sehr klein sei. JANCOVICI und TALMI<sup>8</sup> haben daraufhin mit einem Ansatz, der der Ungleichung (16) genügt und die Deuterondaten richtig wiedergibt,  $N^{14}$  berechnet und das  $\beta$ -Übergangselement wirklich zum Verschwinden gebracht. Die Zentralkräfte, die sie infolgedessen ansetzen mußten, sind aber so schwach, daß die Energieniveaus von  $N^{14}$  völlig falsch herauskommen. Berechnungen der anderen Kerne würden mit diesem Ansatz höchstwahrscheinlich ähnliche Diskrepanzen ergeben, besonders bei den Bindungsenergien von  $H^3$ ,  $He^3$  und  $He^4$ .

FERRELL und VISSCHER<sup>9</sup> benutzen zur Erklärung der Lebensdauer von  $C^{14}$  ebenfalls Parameter für die Wechselwirkung, durch die sie (16) erfüllen. Sie erhalten damit außerdem die Energieschemata von  $Li^6$  und  $N^{14}$  annähernd richtig, erkaufen das jedoch mit einer für das Deuteron viel zu starken Zentralkraft. Dasselbe läßt sich zu der Arbeit von ELLIOTT<sup>10</sup> sagen.

Es ist angesichts dieser Schwierigkeiten von Interesse zu sehen, ob das GAMOW-TELLER-Matrixelement bei  $C^{14}$  wenigstens näherungsweise zum Verschwin-

den gebracht werden kann, wenn man die Ansätze benutzt, die in dieser Arbeit neben den 2-Nukleonen-Daten auch die Energieniveaus von Kernen der 2p-Schale einigermaßen gut ergeben.

Mit Ansatz 7 sind die Eigenvektoren

$$c_1 = 0,791, \quad c_2 = 0,357, \quad c_3 = -0,497,$$

und  $c_4 = 0,643, \quad c_5 = 0,765$ .

Das Ergebnis ist also wegen  $c_2/c_3 < 0$  denkbar unbefriedigend.  $H_{13} = +0,59$  liegt mitten in dem Bereich, der nach (15) und (16) „verboten“ ist.

$$-2,20 \text{ MeV} = -\sqrt{\frac{4}{5}(H_{11}-\varepsilon_1)} < H_{13} \quad (17)$$

$$< \sqrt{(H_{11}-\varepsilon_1)(H_{33}-\varepsilon_1)} = +3,30 \text{ MeV}.$$

Dies gilt auch für die Potentialansätze (3) bis (6) einschließlich (Tab. 2).

Durch Rechnungen hat sich ergeben, daß bei einer YUKAWASchen Ortsabhängigkeit der Tensorkraft dieses Bild nicht wesentlich verändert wird. Wie im Falle einer GAUSSschen Form des Potentials heben sich die Glieder in  $H_{13}$  annähernd gegeneinander weg.

Eine zentrale Dreikörperkraft trägt zur Lösung des Problems nicht viel bei, da sie in der LS-Darstellung diagonal ist und deshalb auf das Element  $H_{13}$  keinen Einfluß hat. Eine Veränderung des Parameters  $w'$  nützt nichts, da er in der Energiematrix für  $J=1, T=0$  nicht auftritt.

Man muß es nach diesen Untersuchungen als äußerst unwahrscheinlich ansehen, daß sich die Lebensdauer von  $C^{14}$  mit einem Potentialansatz der Art wie (3) überhaupt erklären läßt, wenn man nicht für die Struktur von  $C^{14}$  und  $N^{14}$  Annahmen macht, die von der des Schalenmodells sehr stark abweichen.

## § 6. Zusammenfassung

Zugunsten der Anwendung des Schalenmodells sprechen folgende Ergebnisse:

1. Die Abstände der Energieniveaus stimmen, abgesehen von  $Li^6$ , recht gut mit der Erfahrung überein, soweit man überhaupt die Zustände aus den Versuchen kennt. Derjenige Ansatz, der die Zweinukleonen-Daten am besten wiedergibt, liefert bei Anpassung der Spin-Bahn-Kopplung und von  $w'$  offenbar die brauchbarsten Resultate für die Energien der untersuchten Kerne.

2. Die berechneten magnetischen Momente entsprechen in verhältnismäßig guter Näherung den bekannten Werten.

Ferner beeinflussen Korrekturen im Potentialansatz, die man zur Berücksichtigung der Kernabsättigung macht, diese theoretischen Ergebnisse anscheinend günstig.

Gegen das Modell sind auf Grund dieser Arbeit verschiedene Bedenken zu erheben.

1. Die äußerst starken Aufspaltungen der Energieerme im Vergleich zu  $\hbar \omega$  beim Oszillatoppotential. Damit hängt die experimentell erwiesene niedrige Lage von Niveaus mit „falschen“ Paritäten zusammen.

2. Die anscheinend sich falsch ergebenden Quadrupolmomente.

3. Das ungelöste Problem des  $\beta$ -Zerfalls von C<sup>14</sup>.

4. Speziell bei Li<sup>6</sup> die Schwierigkeit, die Energiedifferenzen richtig herauszubekommen.

Ein Teil dieser Mängel ließe sich wahrscheinlich durch Berechnung der Beimischung höherer Konfigurationen erklären. Diese müßte aber im Falle von C<sup>14</sup>/N<sup>14</sup> weit über 20% betragen! (Vorausgesetzt, die dann auftretenden GAMOW-TELLER-Matrixelemente sind von derselben Größenordnung wie die innerhalb der 2p-Schale.)

Als weitere Erklärungsmöglichkeit für den  $\beta$ -Zerfall von C<sup>14</sup> käme die Annahme einer spinabhän-

gigen Vielkörperkraft in Frage. Diese müßte so beschaffen sein, daß sie das Matrixelement  $H_{13}$  der Energiematrix von N<sup>14</sup> in der LS-Darstellung wesentlich verschieden von 0 macht.

Zur Lösung des Problems der Quadrupolmomente könnte eine solche Annahme leider nicht viel beitragen, solange man sich auf die 2p-Schale beschränkt. Die Matrizen zeigen nämlich, daß man gegenüber den bisherigen Ergebnissen bei Li<sup>7</sup> und N<sup>14</sup> eine Vorzeichenänderung nur durch eine radikale Änderung der Eigenvektoren erreichen könnte. Gegenüber Beimischungen höherer Konfigurationen ist jedoch das Quadrupolmoment sehr empfindlich.

Die Arbeit läßt mit sehr großer Wahrscheinlichkeit erwarten, daß die Reichweite der Zentralkräfte kleiner ist als man bisher meistens angenommen hat. Die Reichweiten der Spin-Bahn-Kopplung und der Tensorkraft sind im Vergleich zueinander etwa von derselben Größenordnung, aber mindestens doppelt so groß wie die der Zentralkraft anzusetzen. Für die Austauschparameter der Zentral- und Tensorkräfte gelten in guter Näherung die SERBER-Bedingungen, während wir für die der Spin-Bahn-Kopplung eher  $w'' \approx -m''$  haben.

Herrn Prof. W. HEISENBERG und Herrn Dr. G. LÜDERS möchte ich hiermit für zahlreiche Diskussionen und Anregungen vielmals danken.

## Über einige Beziehungen zwischen Kristallstrukturen

III. Einachsige Dehnung von Kristallstrukturen bei Erhöhung der Elektronenkonzentration

Von KONRAD SCHUBERT

Aus dem Max-Planck-Institut für Metallforschung in Stuttgart  
(Z. Naturforsch. 12 a, 310—319 [1957]; eingegangen am 26. Januar 1957)

Für die verschiedenen Bindungsarten metallischer und nichtmetallischer Phasen werden Beispiele besprochen, in denen eine besondere Art der Strukturänderung in Abhängigkeit von der Änderung der Art der Partner vorliegt. Die Strukturänderung besteht in einer vornehmlich einachsigen Dehnung der Kristallstrukturen bei Erhöhung der Elektronenkonzentration. Die Atomlage in der Struktur erscheint dabei als zweitrangige Aussage, ähnlich wie z. B. die Volumenchemie von der Atomlage im allgemeinen ganz absehen kann.

Der Begriff der Isotypie von Verbindungen (Mehrstoffphasen) ist geometrisch definiert, indem Gleichheit der Raumgruppe und Ähnlichkeit der Parameter gefordert werden. Der Begriff der chemischen Bindung in einer Phase, der allein eine ausreichende Grundlage für eine Systematik der Verbindungen geben kann, ist aber allgemein physikal-

scher Art. Es liegt daher nahe, daß der Strukturtyp nicht Baustein einer Systematik der Verbindungen sein kann, und es erscheint zweckmäßiger, Mengen von Phasen zu betrachten, in denen nicht in erster Linie die Geometrie, sondern vielmehr die Bindung besonders ähnlich ist. Eine solche Menge möge *Strukturfamilie* genannt werden. Eine Strukturfami-